المتتاليات والتراجع

الكفاءات المستهدفة :

- استعمال التمثيل البياني لتخمين سلوك و نهاية متتالية عددية.
- إثبات خاصية بالتراجع.
- دراسة سلوك و نهاية متتالية.
- معرفة مفهوم متتاليتين متجاورتين.
- حل مشكلات توظف فيها المتتاليات و البرهان بالتراجع.

تصميم الدرس

- أنشطة.

I – الاستدلال بالتراجع.

II – المتتاليات التراجعية.

III – تعاريف حول المتتاليات.

V – تكنولوجيا الإعلام والاتصال.

تمارين ومشكلات.

الحلول.

أنشطة

النشاط :

1- لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$f(x) = 80 + \alpha e^{\beta x}$ حيث α و β عددان حقيقيان .

(C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

عين α و β بحيث تكون النقطتان $A(0;53)$ و $B(3;60)$ نقطتان من (C).

تعطى القيم الحقيقية للعددين α و β ثم تعطي القيمتين المدورتين

إلى 10^{-1} لهما .

2 – يعطي إنتاج شركة في اليوم n (n عدد طبيعي غير معدوم)

بالعبارة : $u_n = 80 - 27.e^{-0,1n}$ وحدة خلال بداية انطلاقها .

أ – بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ب – بعد كم يوم تزيد كمية الإنتاج على 72 وحدة .

3 – نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة بالعبارة : $V_n = e^{-0,1n}$ حيث n

عدد طبيعي غير معدوم .

أ – برهن أن المتتالية (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

احسب $\lim_{n \to +\infty} V_n$.

ب – احسب: $S = V_1 + V_2 + ... + V_{10}$.

ج – ما هو إنتاج الشركة في مدة 10 أيام حيث تعطي قيمة مدورة إلى الوحدة لهذا الإنتاج.

الحل :

1- تعيين α و β :

لدينا $A \in (C)$ ومنه : $f(0) = 53$

و $B \in (C)$ ومنه : $f(3) = 60$

وعليه : $\begin{cases} 80 + \alpha = 53 \\ 80 + \alpha e^{3\beta} = 60 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \alpha = -27 \\ 80 - 27.e^{3\beta} = 60 \end{cases}$

وعليه : $-27.e^{3\beta} = -20$ أي : $e^{3\beta} = \frac{20}{27}$

وبالتالي : $ln\, e^{3\beta} = ln\left(\frac{20}{27}\right)$ وعليه : $3\beta = n\left(\frac{20}{27}\right)$

إذن : $\beta = \frac{1}{3}ln\left(\frac{20}{27}\right)$ وعليه : $\alpha = -27$ و $\beta = \frac{1}{3}ln\left(\frac{20}{27}\right)$

القيم المدورة :

$\alpha = -27$ و $\beta \simeq -0,1$

2-أ) نبين أن $\left(u_n\right)$ متزايدة تماما :

$$u_{n+1} - u_n = 80 - 27.e^{0,1(n+1)} - \left(80 - 27.e^{-0,1n}\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = -27.e^{-0,1(n+1)} + 27.e^{-0,1n}$$

$$u_{n+1} - u_n = -27e^{-0,1n} \times e^{-0,1} + 27.e^{-0,1n}$$

$$u_{n+1} - u_n = -27.e^{-0,1n}\left(e^{-0,1} - 1\right)$$

لدينا : $e^{-0,1} - 1 < 0$ و $-27.e^{-0,1n} < 0$

و عليه : $u_{n+1} - u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

إذن المتتالية $\left(u_n\right)$ متزايدة تماما ∎ .

ب) عدد الأيام التي يزيد بعدها الإنتاج عن 72 وحدة :

نحل المتراجحة : $u_n > 72$

و عليه : $80 - 27.e^{-0,1n} > 72$

إذن : $-27.e^{-0,1} > -8$ أي أن : $e^{-0,1} < \frac{8}{27}$

وعليه : $ln\, e^{-0,1n} < ln\left(\frac{8}{27}\right)$ وبالتالي : $-0,1n < ln\left(\frac{8}{27}\right)$

ومنه : $n > \frac{-ln\frac{8}{27}}{0,1}$ أي : $n > 12,16$ إذن : $n \geq 13$.

و عليه بعد ثلاثة عشر يوم يزيد الإنتاج عن 72 وحدة .

3 – أ) نبرهن أن $\left(V_n\right)$ متتالية هندسية :

$$V_{n+1} = e^{-0,1(n+1)} = e^{-0,1n}.e^{-0,1}$$

و عليه : $V_{n+1} = V_n . e^{-0,1}$

إذن : (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = e^{-0,1}$

و عليه : $\lim\limits_{x \to \infty} V_n = \lim\limits_{x \to \infty} e^{-0,1n} = 0$

ب) حساب S :

$$S = V_1 + V_2 + \ldots + V_{10}$$

لدينا : $S = V_1 \times \dfrac{1 - q^{10}}{1 - q}$ حيث : $V_1 = e^{-0,1}$

و منه : $S = e^{-0,1} \times \dfrac{1 - \left(e^{-0,1}\right)^{10}}{1 - e^{-0,1}} = e^{-0,1} \times \dfrac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-0,1}}$

ج) حساب إنتاج الشركة في مدة 10أيام :

لدينا : $S' = u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}$

لكن : $u_n = 80 - 27.e^{-0,1n}$

أي أن : $u_n = 80 - 27.V_n$

و عليه :

$$S' = (80 - 27V_1) + (80 - 27V_2) + \ldots + (80 - 27V_{10})$$

$$S' = 80 + 80 + \ldots + 80 - 27(V_1 + V_2 + \ldots + V_{10})$$

و منه : $S' = 10 \times 80 - 27 \times S$

إذن : $S' = 800 - 27 \times e^{-0,1} \times \dfrac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-0,1}}$

و بالتالي : $S' \approx 638$.

و منه الإنتاج هو 638 وحدة .

الاستدلال بالتراجع

تعريف :

لتكن $p(n)$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n .

نقول عن الخاصية $p(n)$ أنها صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

حيث : $n \geq n_0$ إذا تحقق ما يلي :

1) $p(n)$ صحيحة من أجل $n = n_0$.

2) نبرهن أن $p(n)$ وراثية أي نبرهن أنه إذا كانت $p(k)$ صحيحة

فإن $p(k+1)$ صحيحة حيث k عدد طبيعي كيفي .

أو بعبارة أخرى :

1) نعوض n بأصغر قيمة تأخذها في $\mathbb{N}$ لنتأكد من صحة الخاصية.

2) نفرض صحة $p(k)$ ثم نبرهن صحة $p(k+1)$.

مثال :

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

الحل :

- من أجل $n = 0$ لدينا : $0 = 0$ و منه $p(0)$ صحيحة .

- نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

الفرضية :

$$p(k):\quad 1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

المطلوب :

$$p(k+1):\ 1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

لدينا:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

و منه : $p(k+1)$ صحيحة.

إذن : $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

مثال 2:

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

الحل :

نفرض : $p(0): 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

1) نتأكد من صحة $p(0)$: لدينا : $0^3=\frac{1}{n}(0)^2(0+1)^2$

أي أن $0=0$ و منه : $p(0)$ صحيحة .

2) نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

$$p(k):\ 1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2$$

$$p(k+1):\ 1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)^2\left[k^2+4k+4\right]$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2$$

ومنه $p(k+1)$ صحيحة وعليه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

المتتاليات التراجعية

تعريف :

هي كل متتالية (u_n) معرفة بحدها الأول و علاقة تربط u_{n+1} و u_n من الشكل :

$u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة عددية.

و أحيانا تعرف بحديها الأولين و علاقة تراجعية.

مثال1 :

نعرف المتتالية التراجعية (u_n) كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad , \quad n \geq 0 \end{cases}$$

- احسب كل من u_1 , u_2 , u_3.

الحل :

بوضع $n = 0$: $u_1 = 2u_0 + 1 = 2(1) + 1 = 3$

بوضع $n = 1$: $u_2 = 2u_1 + 1 = 2(3) + 1 = 7$

بوضع $n = 2$: $u_3 = 2u_2 + 1 = 2(7) + 1 = 15$

مثال 2 :

نعرف المتتالية التراجعية (V_n) كما يلي :

$$\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_1 = 3 \\ V_{n+2} = 2V_{n+1} - V_n \quad , n \geq 0 \end{cases}$$

- احسب كل من V_2 , V_3 , V_4.

الحل :

من أجل $n = 0$: $V_2 = 2V_1 - V_0 = 2(3) - 2 = 4$

من أجل $n = 1$: $V_3 = 2V_2 - V_1 = 2(4) - 3 = 5$

من أجل $n = 2$: $V_4 = 2V_3 - V_2 = 2(5) - 4 = 6$

تعاريف حول المتتاليات

1 – اتجاه تغير متتالية عددية :

- متتالية متزايدة : تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة (متزايدة تماما)
إبتداءا من الرتبة n_0 إذا و فقط إذا كان $u_{n+1} \geq u_n$ ($u_{n+1} > u_n$
على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .

- متتالية متناقصة : تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة (متناقصة تماما)
إبتداءا من الرتبة n_0 إذا و فقط إذا كان $u_{n+1} \leq u_n$ ($u_{n+1} < u_n$
على الترتيب) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 .

- متتالية ثابتة : تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إبتداءا ، من الرتبة n_0
إذا و فقط إذا كان $u_{n+1} = u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من
أو يساوي n_0 .

- متتالية رتيبة : المتتالية الرتيبة على مجال I من (رتيبة تماما
على الترتيب) هي متتالية متزايدة (متزايدة تماما على الترتيب)
على المجال I أو متناقصة (قصة تماما على الترتيب) على
المجال I (رتيبة تماما على الترتيب) .

2 – المتتالية المحدودة من الأعلى :

يقال عن متتالية (u_n) أنها محدودة من الأعلى إذا وجد عدد
حقيقي M بحيث : $u_n \leq M$ من أجل كل عدد طبيعي n .

3- المتتالية المحدودة من الأدنى :

يقال عن متتالية (u_n) أنها محدودة من الأدنى إذا وجد عدد
حقيقي m بحيث : $u_n \geq m$ من أجل كل عدد طبيعي n .

4 - المتتالية المحصورة :

يقال عن متتالية (u_n) أنها محصورة إذا كانت محدودة من
الأعلى و من الأدنى أي إذا وجد عددان حقيقيان M و m
بحيث : $m \leq u_n \leq M$ من أجل كل عدد طبيعي n .

4) المتتاليات الحسابية و الهندسية :

1- المتتالية الحسابية :

أ – تعريف :

نقول عن متتالية $\left(u_n\right)$ أنها متتالية حسابية حدها الأول u_0 إذا

و فقط إذا وجد عدد حقيقي ثابت r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = u_n + r$ ؛ r : يسمى أساس المتتالية الحسابية .

ملاحظات :

- إذا كان $r = 0$ تكون المتتالية الحسابية ثابتة و كل حدودها تساوى الحد الأول u_0.
- إذا كان $r > 0$ تكون المتتالية الحسابية متزايدة تماما.
- إذا كان $r < 0$ تكون المتتالية الحسابية متناقصة تماما.

مثال :

ادرس طبيعة المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $u_n = 10n + 7$

الحل :

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \left[10\left(n+1\right)+7\right] - \left[10n+7\right] = 10$$

إذن $\left(u_n\right)$ متتالية حسابية أساسها $r = 10$ و حدها الأول $u_0 = 10 \times 0 + 7$

أي : $u_0 = 7$

ب – الحد العام لمتتالية حسابية :

$\left(u_n\right)$ متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r الحد العام للمتتالية الحسابية

$\left(u_n\right)$ هو : $u_n = u_0 + nr$ من أجل كل عدد طبيعي n.

البرهان بالتراجع : نفرض : $p\left(n\right) : u_n = u_0 + nr$

- مرحلة الابتداء :

من أجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = u_0$ صحيحة و منه $p\left(0\right)$ صحيحة .

- الخاصية الوراثية :

نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

$p(k) : u_k = u_0 + kr$ صحيحة .

$p(k+1) : u_{k+1} = u_0 + (k+1)r$ نبرهن .

لدينا : $u_{k+1} = u_k + r$ حسب تعريف متتالية حسابية .

و لدينا : $u_k = u_0 + kr$ حسب فرضية التراجع

و عليه : $u_{k+1} = u_0 + kr + r$

و منه : $u_{k+1} = u_0 + (k+1)r$

و منه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ج – مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r

ليكن المجموع : $s = u_0 + u_1 + ... + u_n$

من أجل كل عدد طبيعي $s = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

إذن s يساوي نصف عدد الحدود مضروب في مجموع الحد الأول و الحد الأخير.

مثال :

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 3$ و أساسها $r = 5$

- احسب المجاميع التالية :

1) $s_1 = u_0 + u_1 + ... + u_n$

2) $s_2 = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$

3) $s_3 = u_3 + u_4 + ... + u_n$

الحل :

1) لدينا : $s_1 = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

حيث : $u_n = u_0 + nr$ و عليه : $u_n = 3 + 5n$

و عليه : $s_1 = \frac{n+1}{2}(3 + 3 + 5n) = \frac{n+1}{2}(6 + 5n)$

2) لدينا : $s_2 = \frac{11}{2}(56) = 308$.

3) لدينا : $s_3 = \frac{n-2}{2}(u_3 + u_n) = \frac{n-2}{2}(21+5n)$.

5 - الوسط الحسابي :

(u_n) متتالية عددية .تكون المتتالية (u_n) حسابية إذا و فقط

إذا كان : $u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

u_{n+1} يسمى الوسط الحسابي للحدين u_n و u_{n+2} .

2 – المتتالية الهندسية :

أ – تعريف متتالية هندسية :

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 إذا و فقط

إذا وجد عدد حقيقي q حيث أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = u_n \times q$ حيث q : يسمى أساس المتتالية (u_n) .

ملاحظة :

- إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية ثابتة جميع حدودها تساوي u_0

مثال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بالعبارة : $u_n = 10^n$

أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب إعطاء حدها الأول u_0

الحل :

$$u_{n+1} = 10^{n+1} = 10^n.10$$

و عليه : $u_{n+1} = u_n.10$ و منه : (u_n) متتالية هندسية.

أساسها $q = 10$ و حدها الأول $u_0 = 10^0 = 1$

ب – الحد العام لمتتالية هندسية :

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q

عبارة الحد العام للمتتالية الهندسية $\left(u_n\right)$ يعطى بالعبارة : $u_n = u_0 .q^n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

البرهان :(بالتراجع)

نفرض : $p\left(n\right) u_n : u_0 .q^n$

- بداية التراجع :

من أجل $n = 0$: $u_0 = u_0$ صحيحة و منه $p\left(0\right)$ صحيحة.

- الخاصية الوراثية :

نفرض صحة $p\left(k\right)$ و نبرهن صحة $p\left(k+1\right)$

$p\left(k\right) : u_k = u_0 .q^k$ الفرضية

$p\left(k+1\right) : u_{k+1} = u_0 .q^{k+1}$ المطلوب

لدينا : $u_{k+1} = u_k .q$ (التعريف) .

و لدينا : $u_k = u_0 .q^k$ (فرضية التراجع) .

و عليه : $u_{k+1} = u_0 .q^k .q$ و منه : $u_{k+1} = u_0 .q^{k+1}$

و منه $p\left(n\right)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

ملاحظات :

- إذا كان u_1 هو الحد الأول للمتتالية الهندسية فإن $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
- بصفة عامة إذا كان u_p (p عدد طبيعي أصغر من n) الحد الأول فإن الحد العام : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
- تعيين الحد العام يؤول إلى كتابة u_n بدلالة n.

ج – مجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية :

$\left(u_n\right)$ متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q .

ليكن المجموع : $s = u_0 + u_1 + ... + u_n$

- إذا كان $q = 1$: $s = \left(n+1\right) u_0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

- إذا كان : $q \neq 1$: $s = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

- من أجل كل عدد طبيعي n .

s هو جداء الحد الأول في النسبة $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

حيث $n+1$ تمثل عدد الحدود في المجموع .

مثال :

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 20$ و أساسها $q = 2$

1- احسب حدها العام .

2- احسب المجاميع الآتية :

$s_1 = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ؛ $s_2 = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$

$s_3 = u_{10} + u_{11} + ... + u_{20}$

الحل :

1) الحد العام : $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_n = 20 \times 2^n$

2) حساب المجاميع :

* لدينا : $s_1 = u_0 + u_1 + ... + u_n$

ومنه : $s_1 = u_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 20 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$

إذن : $s_1 = 20\left(2^{n+1}-1\right)$

* لدينا : $s_2 = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$

عدد الحدود هو :11

ومنه : $s_2 = u_0 . \frac{1-q^{11}}{1-q} = 20 \times \frac{1-2^{11}}{1-2} = 20\left(2^{11}-1\right)$

* لدينا : $s_3 = u_{10} + u_{11} + ... + u_{20}$

عدد الحدود هو : $20 - 10 + 1 = 11$

و منه : $s_3 = u_{10}.\dfrac{1-q^{11}}{1-q}$ حيث : $u_{10} = 20\times 2^{10}$

و عليه : $s_3 = 20\times 2^{10}\times\dfrac{1-2^{11}}{1-2} = 20\times 2^{10}\left(2^{11}-1\right)$

د – الوسط الهندسي :

تكون المتتالية $\left(u_n\right)$ هندسية إذا و فقط إذا كان : $\left(u_{n+1}\right)^2 = u_n.u_{n+2}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

u_{n+1} يسمى الوسط الهندسي للحدين u_n و u_{n+2} .

5 – نهاية متتالية :

تعريف :

$\left(u_n\right)$متتالية عددية و p عدد حقيقي نقول أن المتتالية $\left(u_n\right)$ تقبل ℓ كنهاية إذا و فقط إذا كان مجال مفتوح I يشمل ℓ فهو يشمل أيضا كل حدود المتتالية $\left(u_n\right)$ ابتداء من رتبة معينة

و نكتب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

و نقول في هذه الحالة أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متقاربة.

تعريف : $\left(u_n\right)$ متتالية عددية .

المتتالية $\left(u_n\right)$ تتناهى نحو $+\infty$ إذا و فقط إذا كان كل مجال مفتوح $]a;+\infty[$ $\left(a\in\mathbb{R}\right)$ يشمل كل الحدود للمتتالية $\left(u_n\right)$ ابتداء من رتبة معينة و نكتب :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

و نقول أن المتتالية $\left(u_n\right)$ في هذه الحالة متباعدة .

المتتالية $\left(u_n\right)$ تتناهى نحو $-\infty$ إذا و فقط إذا كان كل مجال مفتوح $]-\infty\ ;a[$ $\left(a\in\mathbb{R}\right)$ يشمل كل الحدود للمتتالية $\left(u_n\right)$ ابتداء من رتبة معينة و نكتب :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

و نقول أن المتتالية $\left(u_n\right)$ في هذه الحالة متباعدة.

مبرهنة :

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على المجال من الشكل $]a;+\infty[$ حيث a عدد حقيقي .

1) إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

2) إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3) إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

ملاحظة :

النتائج و المبرهنات حول النهايات في الدوال تبقى صحيحة في المتتاليات بشرط أن تكون n في ℕ أكبر أو يساوي رتبة معينة n_0 .

مبرهنة 4 :

(u_n) و (V_n) و (w_n) ثلاث متتاليات عددية و ℓ عدد حقيقي .

إذا كانت $w_n \le u_n \le V_n$ من أجل كل عدد طبيعي n و كانت

$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$

مبرهنة 5 :

(V_n) و (u_n) متتاليتان عدديتان :

إذا كان ابتداء من عدد طبيعي n_0 : $u_n \ge V_n$

و كانت : $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

مبرهنة 6 :

(V_n) و (u_n) متتاليتان عدديتان :

إذا كان ابتداء من عدد طبيعي n_0 : $u_n \le V_n$

و كانت : $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

نهاية متتالية هندسية :

مبرهنة 7 :

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q

لدينا : $u_n = u_0 q^n$

- إذا كان $q > 1$ و $u_n > 0$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

و عليه (u_n) متباعدة.

- إذا كان $q > 1$ و $u_n < 0$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

و عليه (u_n) متباعدة.

- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

و عليه (u_n) متقاربة .

- إذا كان $q \leq -1$ فإن النهاية غير موجودة و عليه (u_n) متباعدة.

ملاحظة :

من أجل $q > 0$: $u_n = u_0 . e^{n \ln q}$

و عليه نحسب النهاية باستعمال خواص الدالة الأسية و اللوغاريتمية.

أمثلة :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad ; \quad \lim_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (-2)^n$ غير موجودة ; $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$

5 - المتتاليتان المتجاورتان :

تعريف :

نقول عن متتاليتان (V_n) و (u_n) أنهما متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة و كانت : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

مثال :

نعتبر المتتاليتان (V_n) و (u_n) حيث :

$u_n = \frac{2}{n}$ و $v_n = -\frac{2}{n}$

هل (V_n) و (u_n) متجاورتان ؟

الحل :

المتتالية (u_n) متناقصة و المتتالية (V_n) متزايدة.

و لدينا : $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{n} \right) = 0$

و عليه (V_n) و (u_n) متجاورتان .

مبرهنة 8 :

إذا كانت (V_n) و (u_n) متتاليتين متجاورتين حيث : المتتالية (u_n) متزايدة و المتتالية (V_n) متناقصة فإن :

1) من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n \leq v_n$

2) المتتاليتان (V_n) و (u_n) متقاربتان نحو نفس العدد λ

3) من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من رتبة n_0 فإن : $u_n \leq \lambda \leq v_n$

ففي المثال السابق :

- (V_n) متزايدة و (u_n) متناقصة و عليه :

1) من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_n \leq u_n$

2) (V_n) و (u_n) متقاربتان نحو 0 .

3) من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_n \leq 0 \leq u_n$

تكنولوجيا الإعلام و الاتصال

التطبيق1 :

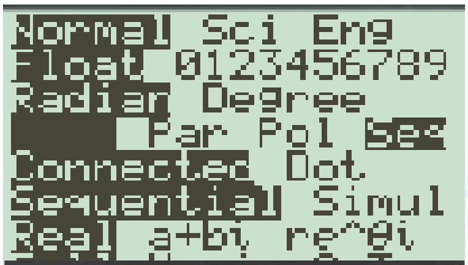
أنشئ باستعمال آلة بيانية الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (U_n) حيث :

$$U_0 = 0 \text{ و } U_n = \tfrac{1}{2}U_{n-1} - 2$$

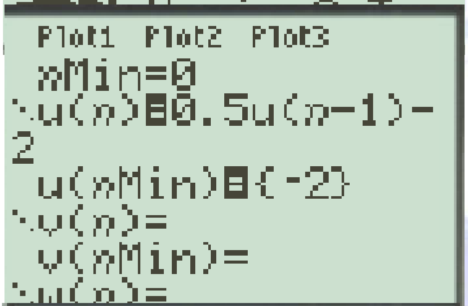
الحل :

1) نضغط على الزر : MODE

ونحول عمل الآلة إلى المتتاليات : Seq

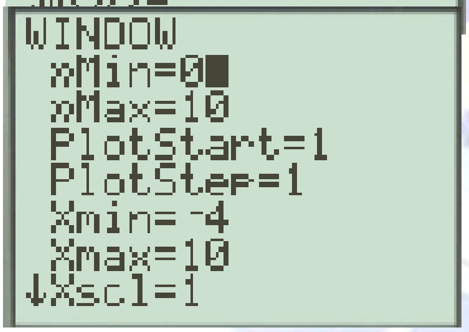


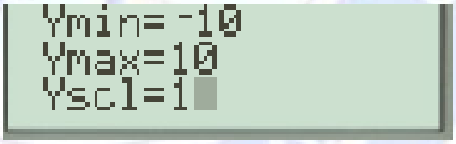
2) نقوم بإدخال المتتالية باستعمال الزر Y= كما يلي :



3) نضغط على WINDOW وندخل الأرقام

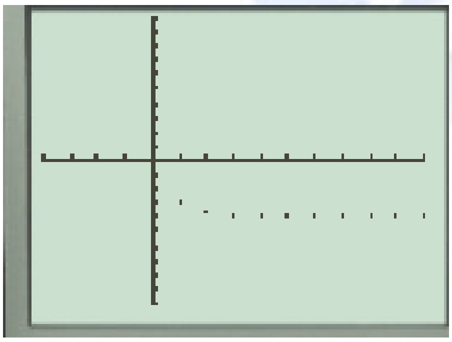
كما هو واضح على الشاشة :





4) نضغط على الزر GRAPH فنحصل على

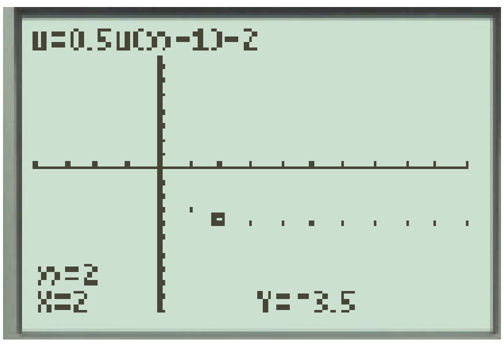
النقط التالية :



5) نضغط على الزر TRACE ونحرك

بزر الاتجاهات المؤشر

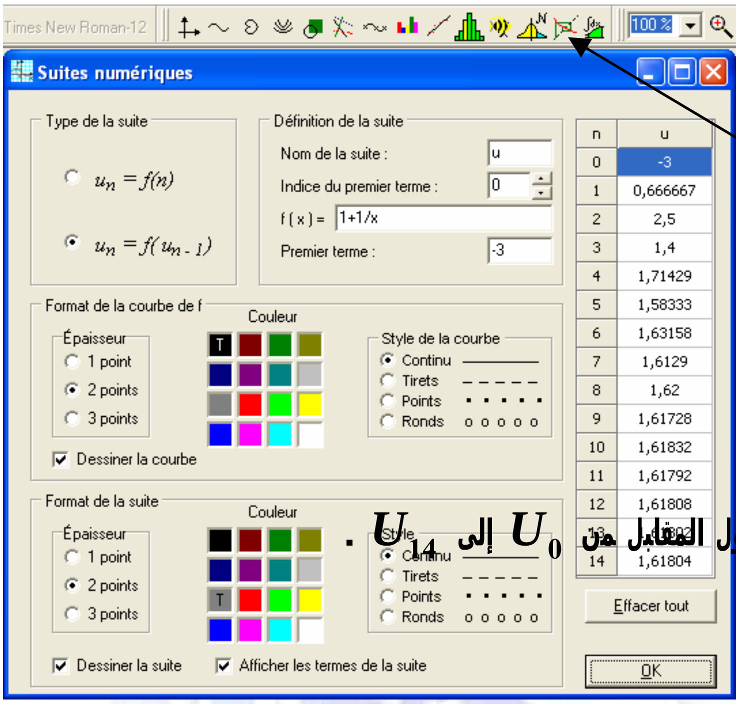
لنحصل على حدود المتتالية



التطبيق 2 :

باستعمال البرمجية sinequanon مثل بيانيا المتتالية التراجعية المعرفة كما يلي :

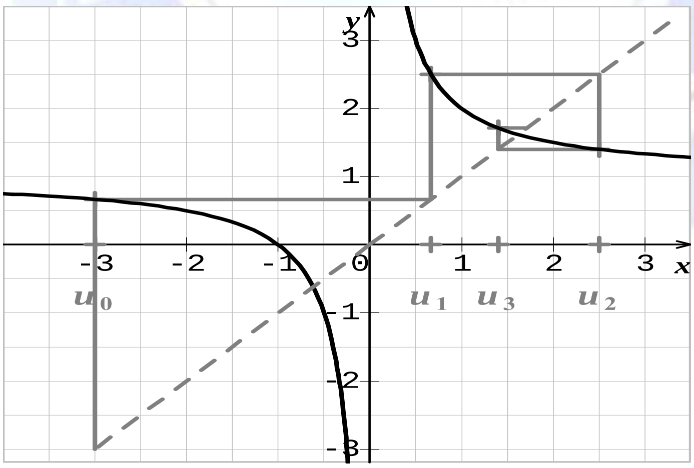
$$\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{U_n} \end{cases}$$



الحل :

1) ننقر على الزر ثم نملأ المعلمات كما هو في النافذة نلاحظ قيم حدود المتتالية تظهر مباشرة في الجدول المقابل من U_0 إلى U_{14} .

2) بالنقر على OK يظهر التمثيل البياني لحدود المتتالية مع كيفية إنشائها .



تمـارين و مشكلات

التمرين 1.

ضع العلامة √ أمام كل جملة صحيحة و العلامة × أمام كل جملة خاطئة :

1) عند البرهان على صحة خاصية $p(n)$ نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$.

2) إذا كانت خاصية $p(n)$ صحيحة من أجل $n=0$ و $n=1$ و $n=2$ فهي صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

3) الاستدلال بالتراجع هو نمط من أنماط البرهان للاستدلال على صحة خاصية تتعلق بعدد صحيح سالب n

4) المتتالية (u_n) حيث : $u_n = 4n - 3$ هي متتالية تراجعية .

5) المتتالية المعرفة كما يلي : $n \geq 0$ $\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

هي متتالية تراجعية .

6) المتتالية (V_n) المعرفة بالعبارة : $u_n = an + b$ هي متتالية حسابية أساسها a و حدها الأول b

7) $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1000} \right)^n = +\infty$

8) $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{840} \right)^n = 0$

9) النهاية : $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{10} \right)^n$ غير موجودة .

10) $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{40000} \right)^n = 0$

11) إذا كان : $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$ فإن المتتاليتان (V_n) و (u_n) متجاورتان.

12) $\lim_{n \to +\infty} \frac{3^n}{4^n} = 0$

13) $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + ... + 4^{99} = \frac{1 - 4^{100}}{1 - 4}$

14) $3+5+7+\ldots+(2n+1)=\dfrac{(2n+4)(n)}{2}$

15) كل متتالية هندسية متقاربة .

16) كل متتالية حسابية غير ثابتة متباعدة .

17) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$

18) المتتالية (u_n) المعرفة ب : $u_n=a^n-b$

حيث $a\neq 0$ و $b\neq 0$ هي متتالية هندسية.

19) المتتالية (u_n) حيث : $u_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ متقاربة.

20) إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty}=\ell$, $\ell\neq 0$ فإن (u_n) متقاربة.

التمرين 2.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم فإن :

$$1-3+5-7+\ldots+(-1)^{n-1}.(2n-1)=n(-1)^{n-1}$$

التمرين 3.

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن المشتق من الرتبة n للدالة $f: x\mapsto \sin x$ يعرف بالعبارة : $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

التمرين 4.

نعتبر الدالة f حيث : $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

برهن بالتراجع أن المشتق من الرتبة n للدالة f يعرف بالعبارة :

$$f^{(n)}(x)=\frac{p_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$$

حيث $p_n(x)$ هو كثير حدود من الدرجة n ، $n\geq 1$

التمرين 5.

نعرف المتتالية $\left(u_n\right)$ بالعبارة $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$ و $u_0=10$

1 – مثل بيانيا المتتالية $\left(u_n\right)$. ماذا تلاحظ ؟

2 – برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد n فإن : $u_n \geq 1$.

3- بين أن المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة .

4 – بين أن المتتالية متقاربة .

5 – احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 6.

$\left(u_n\right)$ متتالية حسابية متناقصة تماما حيث :

$$\begin{cases} u_0+u_1+u_2=15 \\ \dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}=\dfrac{33}{40} \end{cases}$$

- احسب كل من u_2 , u_1 , u_0 و الأساس r .

- احسب المجموع : $S_n=\sum\limits_{i=0}^{n} u_i$.

التمرين 7.

$\left(u_n\right)$ متتالية هندسية حيث : $u_s=1000, u_1=250$ و أساسها q

حيث: $q>0$.

1) احسب q .

2) احسب المجموع $S_n=2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{2}{2}}+2^{\frac{3}{2}}+\ldots\ldots.+2^{\frac{n}{2}}$.

3) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$.

4) احسب بدلالة n الجداء :

$$p_n=\left(\sqrt{2}\right)^1.\left(\sqrt{2}\right)^2.\left(\sqrt{2}\right)^3\times\ldots\times\left(\sqrt{2}\right)^n$$

التمرين 8.

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان كما يلي :

$$n > 1 \quad , \quad v_n = \frac{1}{\ln n} \quad , \quad u_n = \frac{-2}{n}$$

1 – ادرس اتجاه تغير كل من (u_n) و (v_n) .

2 – احسب $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n)$.

3 – هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟

التمرين 9.

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان كما يلي :

$V_n = Ln(n+1), U_n = Ln(n)$ حيث : $n > 0$.

1 - ادرس اتجاه تغير كل من (u_n) و (v_n) .

2- احسب $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n)$.

3- هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

التمرين 10.

ليكن θ عدد حقيقي حيث : $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $,n \ge 0$ $\begin{cases} u_0 = 2\cos\theta \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

1- حسب كل من u_0, u_1, u_2, u_3 بدلالة θ. $(\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1)$

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n

فإن : $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

3 – لتكن (v_n) متتالية معرفة على ℕ بالعبارة : $v_n = \frac{\theta}{2^n}$

احسب نهاية المتتالية (v_n) .

4 – أستنتج أن (u_n) متقاربة .

التمرين 11 .

(u_n) متتالية معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3 + 2u_n}{2 + u_n} \quad , \quad u \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 – احسب : $u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3\ ,\ u_4$.

2 – برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن : $u_n > 0$

ثم استنتج أن (u_n) معرفة من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$

3 – برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n \le \sqrt{3}$

4 – ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

5 – لتكن (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$

أ – برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب حدها الأول

و أساسها q .

ب – احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 12 .

α عدد حقيقي غير معدوم .

نعرف المتتالية (u_n) بحدها الأول u_0 و بالعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \alpha u_n + 3$ من أجل $n \in \mathbb{N}$

1 – عين القيمة α_0 للعدد α بحيث تكون (u_n) متتالية حسابية

أساسها غير معدوم .

2 – نفرض $\alpha \ne \alpha_0$. كيف يمكن اختيار u_0 بحيث تكون (u_n) ثابتة .

3 – نفرض أن (u_n) ليست حسابية و لا ثابتة و نعرف المتتالية

(v_n) كما يلي : $v_n = \beta u_n + \delta \quad , \quad n \ge 0$

حيث β و δ عددان حقيقيان غير معدومين .

- بين أن المتتالية (v_n) تكون هندسية في حالة كون أساسها q

مساويا إلى α .ثم استنتج δ بدلالة α و β

- كيف يمكن اختيار α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية متقاربة .

احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين 13.

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$

و بالعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2^{n+1}}$

1 – احسب S_n : $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$

2- استنتج u_n بدلالة n .

3 – استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4 – ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

التمرين 14.

(u_n) متتالية معرفة كما يلي : $n \geq 0$, $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2 - u_n \geq 0$

- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

فإن : $u_n \geq 0$.

2- برهن أن (u_n) متزايدة.

3 – استنتج أن (u_n) متقاربة.

التمرين 15.

1) (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 60$ و بالعلاقة التراجعية :

$$u_{n+1} - u_n = u_n \times 0{,}06 \quad , \quad n \geq 0$$

أ- أثبت أن (u_n) متتالية هندسية

ب – احسب المجموع : $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$

2) بلغ عدد سكان بلاد 600 مليون نسمة يوم 1 جانفي سنة 2000 .

نفرض أن عدد سكان هذا البلد يزداد سنويا بنسبة قدرها 60%

كم سيصير عدد السكان في 1 جانفي سنة 2007 .

التمرين 16 .

λ عدد حقيقي غير معدوم . نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad , \quad u_1 = 2 \\ u_{n+2} = (\lambda + 1)u_{n+1} - \lambda u_n \quad , n \geq 0 \end{cases}$$

و نعرف المتتالية (V_n) كما يلي : $\mathrm{V}_{n+1} = u_{n+1} - u_n \quad , \quad n \geq 0$

1 – بين أن (V_n) متتالية هندسية ثم احسب V_n بدلالة n و λ .

2 – احسب المجموع S_n بدلالة n و λ حيث : $S_n = \mathrm{V}_0 + \mathrm{V}_1 + \ldots + \mathrm{V}_{n-1}$

ثم بين أن $S_n = u_n - 1$.

- استنتج u_n بدلالة n و λ .

3 – نضع $\lambda = 3$. احسب بدلالة n المجموع :

$S'_n = \mathrm{u}_0^2 + \mathrm{u}_1^2 + \ldots + \mathrm{u}_{n-1}^2$. استنتج n بحيث : $S'_n = \frac{1}{4}n + 225$

الحـلـــول

التمرين 1 .

(1 ☐ × (2 ☐ × (3 ☐ × (4 ☐ × .

(5 ☐ √ (6 ☐ √ (7 ☐ × (8 ☐ √ .

(9 ☐ × (10 ☐ √ (11 ☐ × (12 ☐ √ .

(13 ☐ √ (14 ☐ √ (15 ☐ × (16 ☐ × .

(17 ☐ √ (18 ☐ × (19 ☐ √ (20 ☐ √ .

التمرين 2 .

البرهان بالتراجع على صحة $p(n)$:

$$1-3+5-7+...+(-1)^n.(2n-1)=n(-1)^{n-1}$$

- التأكد من صحة $p(1)$: $1 = 1(-1)^0 = 1$

و منه $p(1)$ صحيحة .

- نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

$$p(k):\ 1-3+5-7+...+(-1)^{k-1}(2k-1)=k(-1)^{k-1}$$

$$p(k+1):\ 1-3+5-7+...+(-1)^{k-1}(2k-1)$$
$$+(-1)^k.(2k+1)=(k+1)(-1)^k$$

$$1-3+5-7+...+(-1)^{k-1}.(2k-1)+(-1)^k.(2k+1)$$
$$=k(-1)^{k-1}+(-1)^k(2k+1)$$

$$=k(-1)^{k-1}+(-1)^{k-1}\times(-1)(2k+1)$$

$$=(-1)^{k-1}[k-2k-1]\ =(-1)^{k-1}(-k-1)$$

$$=-(-1)^{k-1}(k+1)=(-1)^k(k+1)$$

و منه $p(k+1)$ صحيحة .

إذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n.

التمرين 3 .

البرهان بالتراجع على صحة $p(n)$: $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$

- نتأكد من صحة $p(1)$: $f^{(1)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$

و لدينا : $f'(x)=\cos x$ و منه : $p(1)$ محققة .

- نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

الفرضية : $f^{(k)}(x)=sim\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$

المطلوب : $f^{(k+1)}(x)=\sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$

لدينا : $f^{(k)}(x)=sim\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$

لكن :

$$f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}\right)'(x)=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

و منه : $p(k+1)$ صحيحة.

إذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

التمرين 4 .

البرهان بالتراجع على $p(n)$: $f^{(n)}(x)=\frac{p_n(x)}{\left(x^2+1\right)^{p+1}}$

1 – التأكد من صحة $p(1)$:

$$f^{(1)}(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^{1+1}}$$

إذن $p_1(n)=-2x$ و هو كثير حدود من الدرجة الأولى .

2 – نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

الفرضية : $p(k):\quad f^{(k)}(x)=\frac{p_k(x)}{\left(x^2+1\right)^{k+1}}$

حيث : $p_k(x)$ كثير حدود من الدرجة $k+1$.

المطلوب : $p(k): \quad f^{(k+1)}(x)=\dfrac{p_{k+1}(x)}{(x^2+1)^{k+2}}$

لدينا: $f^{(k)}(x)=\dfrac{p_k(x)}{(x^2+1)^{k+1}}$

و لدينا : $f^{(k+1)}(x)=(f^k)'(x)$ و منه :

$$(f^k)'(x)=\frac{p_k'(x).(x^2+1)^{k+1}-(k+1).2x(x^2+1)^k.p_k(x)}{\left[(x^2+1)^{k+1}\right]^2}$$

$$=\frac{(x^2+1)^k\left[p_k'(x).(x^2+1)-2(k+1)xp_k(x)\right]}{(x^2+1)^{2k+2}}$$

$$=\frac{p_k'(x).(x^2+1)-2(k+1)x.p_k(x)}{(x^2+1)^{2k+2-k}}$$

$$=\frac{-2(k+1)xp_k(x)-p_k'(x)}{(x^2+1)^{k+2}}$$

بما أن درجة $p_k(x)$ هي k فإن درجة $p_k'(x)$ هي : $k-1$

و درجة $xp_k(x)$ هي : $k+1$

و عليه درجة $-2(k+1)xp_k(x)-p_k'(x).(x^2+1)$ هي: $k+1$

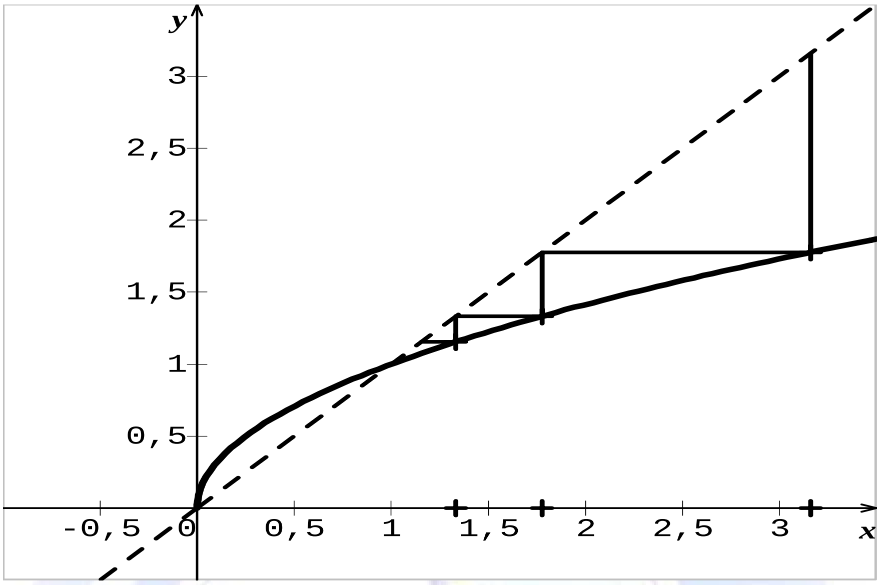
بوضع : $p_{k+1}(x)=2(k+1)xp_k(x)-p_k'(k).(x^2+1)$

نجد : $f^{(k+1)}(x)=\dfrac{p_{k+1}(x)}{(x^2+1)^{k+2}}$ و منه : $p(k+1)$ صحيحة .

إذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين5.

التمثيل البياني :



الملاحظة : حدود المتتالية تقترب من العدد 1 .

2) البرهان بالتراجع على صحة $p(n) : \quad U_n \geq 1$

- التأكد من صحة $p(0) : U_0 \geq 1$ و هي صحيحة لأن : $U_0 = 10$

- نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن $p(k+1)$

الفرضية : $p(k): \quad U_k \geq 1$

المطلوب : $p(k+1): \quad U_{k+1} \geq 1$

لدينا : $U_k \geq 1$ و منه : $\sqrt{U_k} \geq 1$

و عليه : $U_{k+1} \geq 1$ و منه : $p(k+1)$ صحيحة .

3- نبين أن (U_n) متناقصة :

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n} - U_n = \frac{\left(\sqrt{U_n} - U_n\right)\left(\sqrt{U_n} + U_n\right)}{\sqrt{U_n} + U_n}$$

$$= \frac{U_n - U_n^2}{\sqrt{U_n} + U_n} = \frac{U_n\left(1 - U_n\right)}{\sqrt{U_n} + U_n}$$

و بما أن: $U_n \geq 1$ فإن : $1 - U_n \leq 0$ و $U_n > 0$ و $\sqrt{U_n} > 0$ و منه :

$U_{n+1} - U_n \leq 0$ إذن : (U_n) متناقصة .

4 – نبين أن $\left(U_n\right)$ متقاربة .

بما أن المتتالية $\left(U_n\right)$ متناقصة و محدودة من الأدنى بالعدد 1

$\left(U_n > 1\right)$ فإن $\left(U_n\right)$ متقاربة .

5- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

لما $n \to +\infty : n+1 \to +\infty$ و منه : نفرض $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$

فيكون $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \ell$ فتكون : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{U_n}$

و عليه : $\ell = \sqrt{\ell}$ و منه : $\ell^2 = \ell$ أي $\ell^2 - \ell = 0$

و عليه : $\ell\left(\ell - 1\right) = 0$: أما $\ell = 0$ (مرفوض لأن $U_n \geq 1$)

أو : $\ell = 1$ و عليه: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$.

التمرين 6.

الحساب :

بما أن $\left(U_n\right)$ حسابية فإن : $U_0 + U_2 = 2U_1$

و لدينا: $U_0 + U_1 + U_2 = 15$ و منه: $3U_1 = 15$ إذن: $U_1 = 5$

و منه: $\begin{cases} U_0 + 5 + U_2 = 15 \\ \dfrac{1}{U_0} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{U_2} = \dfrac{33}{40} \end{cases}$ و بالتالي: $\begin{cases} U_0 + U_2 = 10 \\ \dfrac{1}{U_0} + \dfrac{1}{U_2} = \dfrac{5}{8} \end{cases}$

و منه: $\begin{cases} U_0 + U_2 = 10 \\ \dfrac{U_0 + U_2}{U_0 . U_2} = \dfrac{5}{8} \end{cases}$ أي: $\begin{cases} U_0 + U_2 = 10 \\ U_0 \times U_2 = 16 \end{cases}$

و عليه : U_0, U_2 هما حلين للمعادلة : $x^2 - 10x + 16 = 0$

لدينا : $\Delta = (10)^2 - u(16)$ أي : $\Delta = 36$

و منه : $x_1 = 2$ و $x_2 = 8$ إذن : $U_0 = 2$ و $U_2 = 8$

و عليه : $r = U_1 - U_0 = 5 - 2 = 3$

حساب S_n : $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$

بما أن عدد الحدود $n+1$ فإن : $S_n = \frac{(n+1)}{2}(U_0 + U_n)$

إذن : $S_n = \frac{(3n+4)(n+1)}{2}$

التمرين 7.

1- حساب q : لدينا $U_5 = U_1 \times q^4$

و منه : $q^4 = \frac{U_5}{U_1}$ أي : $q^4 = \frac{1000}{250}$

أي : $q^4 = 4$ و عليه : $q^2 = 2$ وبالتالي: $q = \sqrt{2}$.

2- حساب المجموع : $S_n = 2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{2}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} + \ldots + 2^{\frac{n}{2}}$

و منه: $S_n = \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^3 + \ldots + \left(\sqrt{2}\right)^n$

إذن: S_n هي مجموع حدود المتتالية الهندسية السابقة حيث : $q = \sqrt{2}$

$$S_n = \sqrt{2} \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = \sqrt{2} \times \frac{1 - \left(\sqrt{2}\right)^n}{1 - \sqrt{2}}$$

$$S_n = \sqrt{2} \times \frac{\left[1 - \left(\sqrt{2}\right)^n\right]\left[1 + \sqrt{2}\right]}{\left[1 - \sqrt{2}\right]\left[1 + \sqrt{2}\right]}$$

$$S_n = \sqrt{2} \times \frac{\left[1 - \left(\sqrt{2}\right)^n\right]^n\left[1 + \sqrt{2}\right]}{1 - 2} = -\sqrt{2}\left[1 - \left(\sqrt{2}\right)^n\right]\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

3 – حساب النهاية :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left[-\sqrt{2}\left(1 - \left(\sqrt{2}\right)^n\right)\right]\left(1 + \sqrt{2}\right) = +\infty$$

لأن : $\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n = +\infty$

4 – حساب الجداء p_n :

$$p_n = \left(\sqrt{2}\right)^1 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 \times \left(\sqrt{2}\right)^3 \times \ldots \times \left(\sqrt{2}\right)^n$$

$$p_n = \left(\sqrt{2}\right)^{1+2+3+\ldots+n} = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{(1+n)n}{2}}$$

التمرين 8.

1 – دراسة اتجاه تغير كل من $\left(U_n\right)$ و $\left(V_n\right)$:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-2}{n+1} + \frac{2}{n} = \frac{-2n + 2(n+1)}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$$

و منه : $U_{n+1} - U_n > 0$ و بالتالي $\left(U_n\right)$ متزايدة تماما .

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{ln(n+1)} - \frac{1}{ln(n)} = \frac{ln(n) - Ln(n+1)}{ln(n+1).ln(n)}$$

$$= \frac{ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}{ln(n+1).ln(n)}$$

بما أن: $n > 1$ فإن: $ln(n) > 0$ و $Ln\left(n+1\right) > 0$

و بما أن: $\frac{n}{n+1} < 1$ فإن: $Ln\left(\frac{n}{n+1}\right) < 0$

و منه: $V_{n+1} - V_n < 0$ إذن : $\left(V_n\right)$ متناقصة تماما .

2- لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-2}{n} - \frac{1}{ln(n)}\right) = 0$

3 – المتتاليتان متجاورتان لأن $\left(U_n\right)$ متزايدة و $\left(V_n\right)$ متناقصة

و لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(U_n - V_n\right) = 0$

التمرين 9.

1- دراسة اتجاه تغير كل من $\left(U_n\right)$ و $\left(V_n\right)$:

لدينا : $$U_{n+1} - U_n = ln(n+1) - ln(n) = ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

بما أن : $\frac{n+1}{n} > 1$ فإن : $Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > 0$

ومنه : $U_{n+1} - U_n > 0$ وبالتالي $\left(U_n\right)$ متزايدة تماما .

$$V_{n+1} - V_n = ln(n+2) - ln(n+1) = ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

بما أن : $\frac{n+2}{n+1} > 1$ فإن : $Ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) > 0$

ومنه : $V_{n+1} - V_n > 0$ وبالتالي $\left(V_n\right)$ متزايدة تماما .

2 – حساب النهاية :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(U_n - V_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left[ln(n+1) - ln(n+2)\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \lim_{n\to+\infty} ln\left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} ln\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right) = 0$$

3 – المتتاليتان غير متجاورتين لأنهما متزايدتان معا .

التمرين 10.

1- الحساب :

$$U_1=\sqrt{2+U_0}=\sqrt{2+2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)}$$

$$=\sqrt{2+4\cos^2\frac{\theta}{2}-2}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}=2\cos\frac{\theta}{2}$$

لأن : $\cos\frac{\theta}{2}>0$ و $\frac{\theta}{2}>0$ يكون : $0\le\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{4}$

$$U_2=\sqrt{2+U_1}=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{2}}=\sqrt{2+2\left(2\cos^2\frac{\theta}{4}-1\right)}$$

$$=\sqrt{4\times\cos^2\frac{\theta}{4}}=2\cos\frac{\theta}{4}=2\cos\frac{\theta}{2^2}$$

$$U_3=\sqrt{2+U_2}=\sqrt{2+2\cos\frac{\theta}{4}}=2\cos\frac{\theta}{8}=2\cos\frac{\theta}{2^3}$$

2 – البرهان بالتراجع على صحة $p(n):\ U_n=2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

- نتأكد من صحة $p(0):\ U_0=2\cos\theta$ محققة ومنه $p(0)$ صحيحة.

الفرضية : $p(k):U_k=2\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$

$$p(k+1):U_{k+1}=2\cos\left(\frac{\theta}{2^{k+1}}\right)$$

$$U_{k+1}=\sqrt{2+U_k}=\sqrt{2+2\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)}$$

$$U_{k+1}=\sqrt{2+2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}-1\right)}=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}}=2\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}$$

لأن : $\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}>0$ لكون : $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

ومنه $p(k+1)$ صحيحة وعليه : $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

-3 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{V}_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\theta}{2^n}=0$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=0$

-4 استنتاج تقارب (U_n) : $U_n=2\cos\mathrm{V}_n$

$$= \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} 2\cos V_n = 2$$

لأن : $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$ ومنه (U_n) متقارب نحو 2 .

التمرين 11.

1 – الحساب :

$$U_1 = \frac{3+2U_0}{2+U_0} = \frac{3-2}{2-1} = 1$$

$$U_2 = \frac{3+2U_1}{2+U_1} = \frac{3+2}{2+1} = \frac{5}{3}$$

$$U_3 = \frac{3+2U_2}{2+U_2} = \frac{3+\frac{10}{3}}{2+\frac{5}{3}} = \frac{19}{11}$$

$$U_4 = \frac{3+2U_3}{2+U_3} = \frac{3+\frac{38}{11}}{2+\frac{19}{11}} = \frac{71}{41}$$

2 – البرهان بالتراجع على صحة الخاصية $U_n > 0 : p(n)$

- التأكد من صحة $U_1 > 0 : p(1)$ وهي محققة ومنه $p(1)$ صحيحة.

- البرهان على أنه إذا كانت $p(k)$ صحيحة فإن $p(k+1)$ صحيحة.

الفرضية : $p(k) : U_k > 0$

المطلوب : $p(k+1) : U_{k+1} > 0$

بما أن : $U_k > 0$ فإن : $\frac{3+2U_k}{2+U_k} > 0$ ومنه $U_{k+1} > 0$

إذن : $p(k+1)$ صحيحة . وعليه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

لدينا : $U_{n+1} = \frac{3+2U_n}{2+U_n}$

و بما أن : $U_n > 0$ فإن : $2+U_n \neq 0$ ومنه : U_{k+1} معرفة من □ نحو □ .

3 - البرهان بالتراجع على صحة الخاصية $U_n \leq \sqrt{3} : p(n)$

- من أجل $n = 0$: $U_0 \leq \sqrt{3}$ و هذا صحيح لأن $U_0 = -1$

وعليه : $p(0)$ صحيحة.

- نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$

الفرضية : $p(k) : U_k \leq \sqrt{3}$

المطلوب : $p(k+1) : U_{k+1} \leq \sqrt{3}$

$$U_{k+1} - \sqrt{3} = \frac{3 + 2U_k}{2 + U_k} - \sqrt{3} = \frac{3 + 2U_k - 2\sqrt{3} - U_k\sqrt{3}}{2 + U_k}$$

$$= \frac{2\left(U_k - \sqrt{3}\right) + 3 - U_k\sqrt{3}}{2 + U_k} = \frac{2\left(U_k - \sqrt{3}\right) \leq 3\left(U_k - \sqrt{3}\right)}{2 + U_k}$$

$$= \frac{\left(U_k - \sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2 + U_n}$$

و بما أن $U_k \leq \sqrt{3}$ فإن $U_k - \sqrt{3} \leq 0$ وعليه : $U_{k+1} - \sqrt{3} \leq 0$

و منه : $U_{k+1} \leq \sqrt{3}$

إذن : $p(k+1)$ صحيحة ومنه : $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

5 – نبرهن أن $\left(\mathrm{V}_n\right)$ متتالية هندسية :

$$\mathrm{V}_{n+1} = \frac{U_{n+1} - \sqrt{3}}{U_{n+1} + \sqrt{3}} = \frac{\dfrac{3 + 2U_n}{2 + U_n} - \sqrt{3}}{\dfrac{3 + 2U_n}{2 + U_n} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{3 + 2U_n - 2\sqrt{3} - U_n\sqrt{3}}{3 + 2U_n + 2\sqrt{3} + U_n\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\left(2 - \sqrt{3}\right)U_n + 3 - 2\sqrt{3}}{\left(2 + \sqrt{3}\right)U_n + 3 + 2\sqrt{3}} = \frac{\left(2 - \sqrt{3}\right)U_n - \sqrt{3}\left(2 - \sqrt{3}\right)}{\left(2 + \sqrt{3}\right)U_n + \sqrt{3}\left(2 + \sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{\left(2 - \sqrt{3}\right)\left[U_n - \sqrt{3}\right]}{\left(2 + \sqrt{3}\right)\left[U_n + \sqrt{3}\right]} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}.\mathrm{V}_n$$

إذن : $$V_{n+1}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}.V_n$$

وعليه : $$V_{n+1}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}.V_n$$

وبالتالي : $$V_{n+1}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2.V_n$$

إذن : $$V_{n+1}=\left(7-4\sqrt{3}\right)V_n$$

ومنه $\left(V_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $q=7-4\sqrt{3}$

وحدها الأول : $$V_0=\frac{U_0-\sqrt{3}}{U_0+\sqrt{3}}=\frac{-1-\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}$$

$$V_0=\frac{\left(-1-\sqrt{3}\right)\left(-1-\sqrt{3}\right)}{\left(-1+\sqrt{3}\right)\left(-1-\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{1-3}=\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$$

$$V_0=-2-\sqrt{3}$$

ب- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$:

$$V_n=V_0.q^n=-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty}V_n=\lim_{n\to+\infty}\left[-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)^n\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}-\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n}=0$$

لأن : $0<2-\sqrt{3}<1$

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$:

$V_n=\frac{U_n-\sqrt{3}}{U_n+\sqrt{3}}$ ومنه : $V_n\left(U_n+\sqrt{3}\right)=U_n-\sqrt{3}$

وعليه : $U_nV_n+V_n\sqrt{3}=U_n-\sqrt{3}$

وبالتالي : $U_nV_n-U_n=-V_n\sqrt{3}-\sqrt{3}$ و منه :

$U_n(V_n-1)=-\sqrt{3}(V_n+1)$ إذن : $U_n=\dfrac{-\sqrt{3}(V_n+1)}{V_n-1}$

و عليه: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-\sqrt{3}(V_n+1)}{V_n-1}=\sqrt{3}$

لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$.

التمرين 12.

1- تعيين α_0 : تكون (U_n) متتالية حسابية إذا وفقط إذا كانت :

$$U_{n+1}-U_n=r$$

و منه : $U_{n+1}-U_n=\alpha U_n+3-U_n=U_n(\alpha-1)+3$

إذن : $\alpha-1=0$ و بالتالي : $\alpha=1$

و بالتالي: $U_{n+1}-U_n=3$ من أجل: $\alpha=1$.

و بالتالي (U_n) متتالية حسابية أساسها 3 من أجل: $\alpha=1$.

2 – لدينا : $\alpha\neq1$

تكون (U_n) ثابتة إذا وفقط إذا كان :

من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=U_n$

و منه: $\alpha U_n+3=U_n$ و عليه: $(\alpha-1)U_n=-3$

إذن: $U_n=\dfrac{-3}{\alpha-1}$ و بما أن (U_n) ثابتة فإن : $U_0=U_n$

و منه: $U_0=\dfrac{-3}{\alpha-1}$.

3 – تبيان أن $q=\alpha$:

$$V_{n+1}=\beta U_{n+1}+\delta=\beta(\alpha U_n+3)+\delta$$

$$=\alpha\beta U_n+3\beta+\delta$$

$$=\alpha\beta U_n+\alpha\delta-\alpha\delta+3\beta+\delta$$

$$=\alpha(\beta U_n+\delta)-\alpha\delta+3\beta+\delta$$

$$=\alpha V_n-\alpha\delta+3\beta+\delta$$

و عليه : $-\alpha\delta+3\beta+\delta=0$ إذن : $\delta(1-\alpha)=-3\beta$

أي: $\delta=\frac{-3\beta}{1-\alpha}$ إذن : $q=\alpha$ و $\delta=\frac{-\beta}{1-\alpha}$

- تكون (V_n) متقاربة لما $-1<q<1$ و عليه : $-1<\alpha<1$

- حساب : $\lim_{n\to+\infty} U_n$:

لدينا : $V_n=\beta U_n+\delta$ و منه : $U_n=\frac{1}{\beta}(V_n-\delta)$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\beta}(V_n-\delta)=\frac{-\delta}{\beta}$$

التمرين 13.

1 – حساب S_n :

S_n هو مجموع $n+1$ حدا من متتالية هندسية حدها الأول 1

و أساسها $q=\frac{1}{2}$ و منه : $S_n=1.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$

إذن : $S_n=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

2 – حساب U_n بدلالة n :

لدينا : $U_1=U_0+\frac{1}{2}$

$$U_2=U_1+\frac{1}{2^2}$$

$$U_3=U_2+\frac{1}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$U_{n-1}=U_{n-2}+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$U_n=U_{n-1}+\frac{1}{2^n}$$

بالجمع طرفا لطرف نجد : $U_n = U_0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$

و منه: $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}$

إذن: $U_n = S_n$ و عليه: $U_n = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

3 – استنتاج نهاية (U_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2$$

لأن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

4 - دراسة اتجاه تغير (U_n) :

$$U_{n+1} - U_n = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right] - 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left[-\frac{1}{2} + 1\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

و عليه: $U_{n+1} - U_n > 0$ و منه: (U_n) متزايدة تماما.

التمرين14.

1 – البرهان بالتراجع على صحة الخاصية $p(n) : 2 - U_n \geq 0$

- من أجل $n = 0$: $2 - U_0 \geq 0$ أي: $4 \geq 0$ محققة .

و منه : $p(0)$ محققة .

- نفرض صحة $p(k)$ و نبرهن صحة $p(k+1)$:

الفرضية : $p(k): \quad 2 - U_k \geq 0$

المطلوب : $p(k+1): \quad 2 - U_{k+1} \geq 0$

لدينا : $2 - U_k \geq 0$ و منه : $U_k \leq 2$

و عليه : $2+U_k \le 4$ و منه : $\sqrt{2+U_k} \le 2$

إذن : $U_{k+1} \le 2$ و عليه : $2-U_{k+1} \ge 0$

إذن : $p(k+1)$ صحيحة .

و منه $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

- نبرهن بالتراجع أن : $U_n \ge 0$

لتكن الخاصية $p(n) : \quad U_n \ge 0$

من أجل $n=1 : U_1 \ge 0$

و لدينا : $U_1 = \sqrt{2+U_0} = \sqrt{2-2} = 0$ و منه: $p(1)$ محققة.

نفرض صحة الخاصية $p(k)$ و نبرهن صحة الخاصية $p(k+1)$

الفرضية : $p(k): \quad U_k \ge 0$

المطلوب : $p(k+1): \quad U_{k+1} \ge 0$

لدينا : $U_k \ge 0$ و منه : $U_k + 2 \ge 0$

و عليه : $\sqrt{U_k+2} \ge 0$ وبالتالي : $U_{k+1} \ge 0$.

إذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

2 – نبرهن أن (U_n) متزايدة :

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2+U_n} - U_n = \frac{\left[\sqrt{2+U_n} - U_n\right]\sqrt{2+U_n} + U_n}{\sqrt{2+U_n} + U_n}$$

$$= \frac{2+U_n - U^2{}_n}{\sqrt{2+U_n} + U_n} = \frac{-U_n^2 + U_n + 2}{\sqrt{2+U_n} + U_n}$$

ندرس الإشارة : $-U_n^2 + U_n + 2$

لدينا : $\Delta = 9$ و منه : $U_n = 2$ أو $U_n = -1$ إذن :

$$-U_n^2 + U_n + 2 = -(U_n - 2)(U_n + 1) = (2 - U_n)(U_n + 1)$$

و منه : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(2-U_n)(U_n+1)}{\sqrt{2+U_n} + U_n}$

و بما أن: $2-U_n \geq 0$ و $U_n \geq 0$ فإن: $U_{n+1}-U_n \geq 0$

إذن : (U_n) متزايدة .

3 – استنتاج تقارب (U_n) :

لدينا : $2-U_n \geq 0$ و منه : $U_n \leq 2$

إذن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى و متزايدة وعليه فهي متقاربة

التمرين 15.

I-1) إثبات أن (U_n) متتالية هندسية .

لدينا : $U_{n+1}-U_n = U_n \times 0,06$

و منه : $U_{n+1} = U_n + U_n \times 0,06$

$$U_{n+1} = U_n(1+0,06)$$

إذن : $U_{n+1} = 1,06 \times U_n$

و عليه : (U_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1,06$.

2) حساب U_n بدلالة n :

لدينا : $U_n = U_0 \times q^n$ و منه : $U_n = 60.(1,06)^n$.

3) حساب المجموع :

لدينا : $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$

$$S_n = U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 60 \times \frac{1-(1,06)}{1-1,06}$$

$$S_n = 60 \times \frac{1-(1,06)^{n+1}}{0,06} = 60 \times \frac{1-(1,06)^{n+1}}{\frac{6}{100}}$$

$$S_n = \frac{6000}{6} \times \left[1-(1,06)^{n+1}\right]$$

$$S_n = 1000 \times \left[1-(1,06)^{n+1}\right]$$

II - نفرض U_n عدد السكان في سنة n

وعليه U_{n+1} عدد السكان في السنة الموالية $n+1$

و عليه : $U_{n+1} = U_n + U_n \times \frac{6}{100}$

$$U_{n+1} = U_n + U_n \times 0,06$$

إذن: $U_{n+1} = 1,06.U_n$ و هي نفس المتتالية السابقة .

و منه : $U_n = 60(1,06)^n$ حيث : $U_0 = 60$

عدد السكان في السنة 2000 بالملايين .

فيكون عدد السكان في السنة2007 هو U_7

حيث: $U_7 = 60(1,06)^7$ و منه: $U_7 \simeq 90,22$.

إذن عدد السكان في السنة 2007 هو حوالي 90,22 مليون نسمة.

التمرين16.

1 – نبين أن (V_n) متتالية هندسية :

$$V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} = (\lambda + 1)U_{n+1} - \lambda U_n - U_{n+1}$$
$$= \lambda U_{n+1} - \lambda U_n = \lambda(U_{n+1} - U_n) = \lambda V_n$$

إذن: $V_{n+1} - \lambda V_n$ وعليه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \lambda$

- حساب V_n بدلالة n و λ :

لدينا : $V_0 = U_1 - U_0 = 1$, $V_n = V_0.q^n$

و منه : $V_n = \lambda^n$.

2 – حساب S_n :

لدينا : $S_n = V_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$

نبين أن : $S_n = U_n - 1$

لدينا : $V_0 = U_1 - U_0$

$$V_1 = U_2 - U_1$$

$$V_2 = U_3 - U_2$$

$$\vdots$$

$$V_{n-2} = U_{n-1} - U_{n-2}$$

$$V_{n-1} = U_n - U_{n-1}$$

بالجمع طرفا لطرف نجد : $V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1} = U_n - U_0$

و منه : $S_n = U_n - 1$ إذن : $U_n = \dfrac{1-\lambda^n}{1-\lambda} + 1$

حساب : S'_n

$$S'_n = U_0^2 + U_1^2 + \ldots + U_{n-1}^2$$

لدينا : $U_n = \dfrac{1-\lambda}{1-\lambda} + 1$ و منه : $U_n = \dfrac{1-3^n}{1-3} + 1$

إذن : $U_n = -\dfrac{1}{2}\left(1-3^n\right) + 1$ أي : $U_n = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}.3^n$

$$U_n = -\frac{1}{2}\left(1+3^n\right)$$

$$S'_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1+3^0\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1+3^1\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1+3^{n-1}\right)^2$$

$$S'_n = \frac{1}{4}\left[1 + 2.3^0 + \left(3^0\right)^2\right] + \frac{1}{4}\left[1 + 2.3^1 + \left(3^1\right)^2\right] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{4}\left[1 + 2.3^{n-1} + \left(3^{n-1}\right)^2\right]$$

$$S'_n = \frac{1}{4}\Big[\ 1 + 1 + \ldots + 1 + 2\left(3^0 + 3^1 + \ldots + 3^{n-1}\right)$$

$$+\left(3^0 + 3^2 + \ldots + 3^{2(n-1)}\right)\Big]$$

$$S'_n = \frac{1}{4}\left[n + 2 \times \frac{1-3^n}{1-3} + \frac{1-3^{2n}}{1-3^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[n - 1 + 3^n + \frac{1-3^{2n}}{-8}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[n + 3^{n} - 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}3^{2n} \right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[n + \frac{1}{8}3^{2n} + 3^{n} - \frac{9}{8} \right]$$

استنتاج n :

لدينا : $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}3^{2n} + 3^{n} - \frac{9}{8} \right) = 225$

و منه : $3^{2n} + 8.3^{n} - 7209 = 0$ ، بوضع : $3^{n} = t$ نجد :

$t^{2} - 8t - 7209 = 0$ و منه : $t = 81$ و منه : $3^{n} = 81$

و عليه : $n = 4$.