
Limites de fonctions

1 Théorie

Exercice 1 1. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$.

2. Soient m, n des entiers positifs. Étudier $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$.

3. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

1. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.

2 Calculs

Exercice 3 Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1}$

Exercice 4 Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x + \sqrt{x})$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln x}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln(x+1)}$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} \ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$

8. $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 - 1) \ln(7x^3 + 4x^2 + 3)$

9. $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3-8)$
10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^x-1)}{\ln(x+1)}$
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x \ln(x+2))$
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x}$
13. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}$
14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$
15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$
16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$
17. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}}$
18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$
19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$
20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$

Exercice 5 Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x (\cos 2x - \cos x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2 x}, \text{ en fonction de } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6 Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(1 + e^{-x}))^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sin \frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$$

Exercice 7 Trouver :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{x^x} \ln x}{x^x - 1}$$

Exercice 8 Trouver pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} .$$

Exercice 9 Trouver pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} .$$

Limites de fonctions

Indication 1 Utiliser l'expression conjuguée.

Indication 2 1. Reasonner par l'absurde.

2. Montrer que la limite est la borne supérieure de l'ensemble des valeurs atteintes $f(\mathbb{R})$.

Indication 5 1. Calculer d'abord la limite de $f(x) = \frac{x^k - \alpha}{x - \alpha}$.

2. Utiliser $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ et faire un changement de variable $u = \cos x$.

3. Utiliser l'expression conjuguée.

4. Diviser numérateur et dénominateur par $\sqrt{x - \alpha}$ puis utiliser l'expression conjuguée.

5. On a toujours $y - 1 \leq E(y) \leq y$, poser $y = 1/x$.

6. Diviser numérateur et dénominateur par $x - 2$.

7. Pour $\alpha \geq 4$ il n'y a pas de limite, pour $\alpha < 4$ la limite est $+\infty$.

Limites de fonctions

Correction 1 Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes racines carrées, il est utile de faire intervenir “l’expression conjuguées” :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Les racines au numérateur ont “disparu” en utilisant l’identité $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$. Appliquons ceci sur un exemple :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m})(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{1+x^m - (1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} \end{aligned}$$

Et nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} = 1.$$

Donc l’étude de la limite de f en 0 est la même que celle de la fonction $x \mapsto x^{m-n}$. Distinguons plusieurs pour la limite de f en 0.

- Si $m > n$ alors x^{m-n} et donc $f(x)$ tend vers 0.
- Si $m = n$ alors x^{m-n} et $f(x)$ vers 1.
- Si $m < n$ alors $x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{x^k}$ avec $k = n - m$ un exposant positif. Si k est pair alors les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{x^k}$ sont $+\infty$. Pour k impair la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$. Conclusion pour $k = n - m > 0$ pair, la limite de f en 0 vaut $+\infty$ et pour $k = n - m > 0$ impair f n’a pas de limite en 0 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

Correction 2 1. Soit $p > 0$ la période : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + p) = f(x)$. Par une récurrence facile on montre :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + np) = f(x).$$

Comme f n’est pas constante il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Notons $x_n = a + np$ et $y_n = b + np$. Supposons que f a une limite ℓ en $+\infty$. Comme $x_n \rightarrow +\infty$ alors $f(x_n) \rightarrow \ell$. Mais $f(x_n) = f(a + np) = f(a)$, donc $\ell = f(a)$. De même avec la suite $(y_n) : y_n \rightarrow +\infty$ donc $f(y_n) \rightarrow \ell$ et $f(y_n) = f(b + np) = f(b)$, donc $\ell = f(b)$. Comme $f(a) \neq f(b)$ nous obtenons une contradiction.

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et majorée par $M \in \mathbb{R}$. Notons

$$f = f(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

F est un ensemble (non vide) de \mathbb{R} , notons $\ell = \sup F$. Comme $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de F , alors $\ell < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, par les propriétés du sup il existe $y_0 \in F$ tel que $\ell - \varepsilon \leq y_0 \leq \ell$. Comme $y_0 \in F$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = y_0$. Comme f est croissante alors :

$$\forall x \geq x_0 \quad f(x) \geq f(x_0) = y_0 \geq \ell - \varepsilon.$$

De plus par la définition de ℓ :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq \ell.$$

Les deux propriétés précédentes s'écrivent :

$$\forall x \geq x_0 \quad \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell.$$

Ce qui exprime bien que la limite de f en $+\infty$ est ℓ .

Correction 3 1. La limite à droite vaut $+2$, la limite à gauche -2 donc il n'y a pas de limite.

2. $-\infty$

3. 4

4. 2

5. $\frac{1}{2}$

6. 0

7. $\frac{1}{3}$ en utilisant que $a^3 - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2)$ pour $a = \sqrt[3]{1 + x^2}$.

8. $\frac{1}{n}$

Correction 4 1. $-\infty$

2. 0

3. $+\infty$

4. $+\infty$

5. $\frac{3}{2}$

6. $-\infty$

7. 0

8. 0

9. 0

10. 0

11. -2

12. $-\infty$

13. 1

14. e^4

15. 1

16. e

17. e
 18. 0
 19. 0
 20. 0

Correction 5 1. Montrons d'abord que la limite de

$$f(x) = \frac{x^k - \alpha}{x - \alpha}$$

en α est $k\alpha^{k-1}$. Un calcul montre que $f(x) = x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \dots + \alpha^{k-1}$, et donc la limite en $x = \alpha$ est $k\alpha^{k-1}$. Une autre méthode consiste à dire que $f(x)$ est la taux d'accroissement de la fonction x^k , et donc la limite de f en α est exactement la valeur de la dérivée de x^k en α , soit $k\alpha^{k-1}$. Ayant fait ceci revenons à la limite de l'exercice : comme

$$\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n} = \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x - \alpha} \times \frac{x - \alpha}{x^n - \alpha^n}.$$

Le premier terme du produit tend vers $(n+1)\alpha^n$ et le second terme, étant l'inverse d'un taux d'accroissement, tend vers $1/(n\alpha^{n-1})$. Donc la limite cherchée est

$$\frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\alpha.$$

2. La fonction s'écrit aussi $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\cos x(\cos 2x - \cos x)}$. Or $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Posons $u = \cos x$, alors

$$f(x) = \frac{1 - u}{u(2u^2 - u - 1)} = \frac{1}{u(-1 - 2u)}$$

Lorsque x tend vers 0, $u = \cos x$ tend vers 1, et donc $f(x)$ tend vers $-\frac{1}{3}$.

3.

$$\begin{aligned} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} + 1} \end{aligned}$$

Quand $x \rightarrow +\infty$ alors $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ et $\frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x} \rightarrow 0$, donc la limite recherchée est $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. La fonction s'écrit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x - \alpha}\sqrt{x + \alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x - \alpha}} - 1}{\sqrt{x + \alpha}}.$$

Notons $g(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x - \alpha}}$ alors à l'aide de l'expression conjuguée

$$g(x) = \frac{x - \alpha}{(\sqrt{x - \alpha})(\sqrt{x + \alpha})} = \frac{\sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x + \alpha}}.$$

Donc $g(x)$ tend vers 0 quand $x \rightarrow \alpha^+$. Et maintenant $f(x) = \frac{g(x) - 1}{\sqrt{x + \alpha}}$ tend vers $-\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

5. Pour tout réel y nous avons la double inégalité $y - 1 \leq E(y) \leq y$, donc $\frac{y-1}{y} \leq \frac{E(y)}{y} \leq 1$.
On en déduit que lorsque y tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) alors $\frac{E(y)}{y}$ tend 1. En posant $y = 1/x$,
et en faisant tendre x vers 0, alors $x E(\frac{1}{x}) = \frac{E(y)}{y}$ tend vers 1.

6.

$$\frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6} = \frac{e^x - e^2}{x - 2} \times \frac{x - 2}{x^2 + x - 6} = \frac{e^x - e^2}{x - 2} \times \frac{1}{x + 3}.$$

La limite de $\frac{e^x - e^2}{x - 2}$ en 2 vaut e^2 (c'est la taux d'accroissement de la fonction e^x), la limite voulue est $\frac{e^2}{5}$.

7. En calculant les valeurs de f en $2k\pi$ et en $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ on prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$ pour $\alpha \geq 4$. Reste le cas $\alpha < 4$. Il existe β tel que $\alpha < \beta < 4$.

$$f(x) = \frac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2 x} = \frac{x^{4-\beta}}{\frac{1}{x^\beta} + \frac{x^\alpha}{x^\beta} \sin^2 x}.$$

Le numérateur tend $+\infty$ car $4 - \beta > 0$. $\frac{1}{x^\beta}$ tend vers 0 ainsi que $\frac{x^\alpha}{x^\beta} \sin^2 x$ (car $\beta > \alpha$ et $\sin^2 x$ est bornée par 1). Donc le dénominateur tend vers 0 (par valeur positive). La limite est donc de type $+\infty/0^+$ (qui n'est pas indéterminée!) et vaut donc $+\infty$.

Correction 6 Réponses : $\frac{1}{e}, 0, e$.

Correction 7 Réponse : 1.

Correction 8 Réponse : $\sup(a, b)$.

Correction 9 Réponse : \sqrt{ab} .