
Dérivabilité

1 Calculs

Exercice 1 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} \quad \text{si } x \neq 1 \quad f_3(1) = 1.$$

Exercice 2 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \text{sinon}$$

soit dérivable sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 4 Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2 x \quad ; \quad h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

2 Théorème de Rolle et accroissements finis

Exercice 5 Montrer que le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = [(1 - t^2)^n]^{(n)}$$

est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1, 1]$.

Exercice 6 Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ (a et b réels) admet au plus trois racines réelles.

Exercice 7 Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a, b[$ s'annulant en $n + 1$ points de $]a, b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue, il existe un point x_0 de $]a, b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Exercice 8 Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ préciser le nombre θ de $] \alpha, \beta[$. Interprétation géométrique ?

Exercice 9 Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que

$$x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1-\alpha)y) - \alpha \ln x - (1-\alpha) \ln y.$$

De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0, 1[$

$$\alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1-\alpha)y).$$

Interprétation géométrique ?

Exercice 10 Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[n, n+1]$ montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice 11 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad |e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$.

3 Divers

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1-k)^3 x^2 + (1+k)x^3$ où k est un nombre réel. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'origine est un extremum local de f .

Exercice 13 Déterminer les extremums de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur \mathbb{R} .

Exercice 14 Quel est le lieu des points d'inflexion (puis des extrémums relatifs) de f_λ quand λ décrit \mathbb{R} , où :

$$f_\lambda : x \rightarrow \lambda e^x + x^2.$$

Exercice 15 (Examen 2000) Énoncer le théorème de Rolle pour une fonction $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ ($a < b$) et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b[$. (Raisonnement par l'absurde et application du théorème de Rolle.)
2. Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a, b]$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3. On suppose que $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \ell.$$

4. Application : Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{Arccos} x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Exercice 16 (Examen 2000) Soit $n \geq 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1 + x^n}{(1 + x)^n}, \quad x \geq 0.$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^+ et calculer $f'(x)$ pour $x \geq 0$.
 (b) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R}^+ , montrer que f atteint un minimum sur \mathbb{R}^+ que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante :

$$(1 + x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

(b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a

$$(x + y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

Exercice 17 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur \mathbb{R} , en particulier en $t = 0$.
2. Étudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n -ième de f s'écrit

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$

où P_n est un polynôme.

- (a) Trouver P_1 et P_2 .
- (b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1} , P_n et P'_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que f est de classe C^∞ .

Dérivabilité

Indication 1 Le seul problème est en 0. f_1 est dérivable en 0 mais pas f_2 ni f_3 .

Indication 2 Vous avez deux conditions : il faut que la fonction soit continue (car on veut qu'elle soit dérivable donc elle doit être continue) et ensuite la condition de dérivabilité proprement dite.

Indication 3 f est continue en 0 en la prologuant par $f(0) = 0$. f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Indication 4 On ne cherchera pas à utiliser la formule de Leibniz mais à linéariser les expressions trigonométriques.

Indication 5 Il faut appliquer le théorème de Rolle un fois au polynôme $(1 - t^2)^n$ puis deux fois à sa dérivée première, puis trois fois à sa dérivée seconde...

Indication 6 On peut appliquer le théorème de Rolle plusieurs fois.

Indication 7 C'est encore Rolle de nombreuses fois

Indication 9

1. Utiliser le théorème des accroissement finis avec la fonction $t \mapsto \ln t$
2. Montrer d'abord que f'' est négative. Se servir du théorème des valeurs intermédiaires pour f' .

Indication 10 Une fois le théorème des accroissement finis utilisé vous obtenez une somme télescopique.

Indication 11 Le théorème des accroissements finis donne un résultat proche de celui souhaité à un facteur près. Pour obtenir la majoration demandée on peut utiliser le théorème de Rolle avec une fonction bien choisie.

Indication 14 On distinguera les cas $\lambda \geq 0$ et $\lambda < 0$. Pour le cas $\lambda < 0$ on considèrera des sous-cas.

Dérivabilité

Correction 1 1. La fonction f_1 est dérivable en dehors de $x = 0$. Pour savoir si f_1 est dérivable en 0 regardons le taux d'accroissement :

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = x \cos \frac{1}{x}.$$

Mais $x \cos(1/x)$ tend vers 0 (si $x \rightarrow 0$) car $|\cos 1/x| \leq 1$. Donc le taux d'accroissement tend vers 0. Donc f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0) = 0$.

2. Encore une fois f_2 est dérivable en dehors de 0. Le taux d'accroissement en $x = 0$ est :

$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} \sin \frac{1}{x}$$

Nous savons que $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ et que $\sin 1/x$ n'a pas de limite quand $x \rightarrow 0$. Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite, donc f_2 n'est pas dérivable en 0.

3. La fonction f_3 s'écrit :

$$f_3(x) = \frac{|x||x-1|}{x-1}.$$

- Donc pour $x \leq 1$ on a $f_3(x) = x$, pour $0 \leq x < 1$ on $f_3(x) = -x$. Pour $x < 0$ on a $f_3(x) = x$.
- La fonction f_3 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
- La fonction f_3 n'est pas continue en 1, en effet $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_3(x) = +1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_3(x) = -1$. Donc la fonction n'est pas dérivable en 1.
- La fonction f_3 est continue en 0. Le taux d'accroissement pour $x > 0$ est

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1$$

et pour $x < 0$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = +1.$$

Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite en 0 et donc f_3 n'est pas dérivable en 0.

Correction 2 Il faut d'abord que la fonction soit continue en $x = 1$. La limite à gauche est $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} = +1$ et à droite $\lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$. Donc

$$a + b + 1 = 1.$$

Il faut maintenant que les dérivées à droites et à gauches soient égales : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2ax + b = 2a + b$. Donc

$$2a + b = \frac{1}{2}.$$

Le seul couple (a, b) solution des deux équations est $(a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2})$.

Correction 3 f est C^∞ sur \mathbb{R}^* .

1. Comme $|\sin 1/x| \leq 1$ alors f tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$. Donc en posant $f(0) = 0$, la fonction f est continue sur \mathbb{R} .
2. Le taux d'accroissement est

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}.$$

Comme ci-dessus il y a une limite (qui vaut 0) en $x = 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

3. Sur \mathbb{R}^* , $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$, Donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \rightarrow 0$. Donc f' n'est pas continue en 0.

Correction 4 1. Selon que $n \equiv 0[4], 1[4], 2[4], 3[4]$ alors $f^{(n)}(x)$ vaut respectivement $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$.

2. La dérivée de $\sin^2 x$ est $2 \sin x \cos x = \sin 2x$. Et donc les dérivées suivantes seront : $2 \cos 2x, -4 \cos 2x, 8 \sin 2x, 16 \cos 2x, \dots$ Et selon que $n \equiv 1[4], 2[4], 3[4], 0[4]$, alors $g^{(n)}(x)$ vaut respectivement $2^{n-1} \sin 2x, 2^{n-1} \cos 2x, -2^{n-1} \sin 2x, -2^{n-1} \cos 2x$.
3. $\sin(x)^3 + \cos(x)^3 = -\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x) + \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x)$ et on dérive...

Correction 5 $Q_n(t) = (1 - t^2)^n$ est un polynôme de degré $2n$, on le dérive n fois, on obtient un polynôme de degré n . -1 et $+1$ sont des racines d'ordre n de Q_n , donc $Q_n(1) = Q'_n(1) = \dots = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$, même chose en -1 . $Q(-1) = 0 = Q(+1)$ donc d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]-1, 1[$ telle que $Q'_n(c) = 0$. Donc $Q'_n(-1) = 0, Q'_n(c) = 0, Q'_n(+1) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle deux fois (sur $[-1, c]$ et sur $[c, +1]$), on obtient l'existence de racines d_1, d_2 pour Q''_n , auxquelles il faut rajouter -1 et $+1$. On continue ainsi par récurrence. On obtient pour $Q_n^{(n-1)}$, $n + 1$ racines : $-1, e_1, \dots, e_{n-1}, +1$. Nous appliquons le théorème de Rolle n fois. Nous obtenons n racines pour $P_n = Q_n^{(n)}$. Par constructions ces racines sont réelles distinctes (donc simples). Comme un polynôme de degré n a au plus n racines, nous avons obtenu toutes les racines.

Correction 6 1. Par l'absurde on suppose qu'il y a (au moins) quatre racine distinctes pour $P_n(X) = X^n + aX + b$. Notons les $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Par le théorème de Rolle appliqué trois fois (entre x_1 et x_2 , entre x_2 et x_3, \dots) il existe $x'_1 < x'_2 < x'_3$ des racines de P'_n . On applique deux fois Rolle entre x'_1 et x'_2 et entre x'_2 et x'_3 . On obtient deux racines distinctes pour P''_n . Or $P''_n = n(n-1)X^{n-2}$ ne peut avoir que 0 comme racines. Donc nous avons obtenu une contradiction.

2. Autre méthode : Le résultat est évident si $n \leq 3$. On suppose donc $n \geq 3$. Soit P_n l'application $X \mapsto X^n + aX + b$ de \mathbb{R} dans lui-même. Alors $P'_n(X) = nX^{n-1} + a$ s'annule en au plus deux valeurs. Donc P_n est successivement croissante-décroissante-croissante ou bien décroissante-croissante-décroissante. Et donc P_n s'annule au plus trois fois.

Correction 7 Comme f' est dérivable, elle est continue. Comme f s'annule $n + 1$ fois, f' change de signe (au moins) $n + 1$ fois donc s'annule (au moins) n fois. On peut bien sûr recommencer, le résultat en découle.

Correction 8 $f(\beta) - f(\alpha) = f'(c)(\beta - \alpha)$. Donc $a(\beta^2 - \alpha^2) + b(\beta - \alpha) = (2ac + b)(\beta - \alpha)$. Donc $c = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Géométriquement, cela signifie que la droite qui passe par $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$, est parallèle à la tangente qui passe en $(\frac{\alpha + \beta}{2}, f(\frac{\alpha + \beta}{2}))$.

Correction 9 1. Soit $g(t) = \ln t$. Appliquons le théorème des accroissements finis sur $[x, y]$. Il existe $c \in]x, y[$, $g(y) - g(x) = g'(c)(y - x)$. Soit $\ln y - \ln x = \frac{1}{c}(y - x)$. Donc $\frac{\ln y - \ln x}{y - x} = \frac{1}{c}$. Or $x < c < y$ donc $\frac{1}{y} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$. Ce qui donne les inégalités recherchées.

2. $f'(\alpha) = \frac{x-y}{\alpha x + (1-\alpha)y} - \ln x + \ln y$. Et $f''(\alpha) = -\frac{(x-y)^2}{(\alpha x + (1-\alpha)y)^2}$. Comme f'' est négative alors f' est décroissante sur $[0, 1]$. Or $f'(0) = \frac{x-y-y(\ln x - \ln y)}{y} > 0$ d'après la première question et de même $f'(1) < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [x, y]$ tel que $f'(c) = 0$. Maintenant f' est positive sur $[0, c]$ et négative sur $[c, 1]$. Donc f est croissante sur $[0, c]$ et décroissante sur $[c, 1]$. Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ donc pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq 0$. Cela prouve l'inégalité demandée.

3. Géométriquement nous avons prouvé que la fonction \ln est concave, c'est-à-dire que la corde (le segment qui va de $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$) est sous la courbe d'équation $y = f(x)$.

Correction 10 Le théorème des accroissements finis donne : $\ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{c_n}(n+1-n) = \frac{1}{c_n}$, avec $c_n \in [n, n+1]$. Or $c_n \geq n$ donc $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{c_n}$. Donc :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1).$$

La dernière égalité s'obtient car la somme est télescopique. Donc $S_n \geq \ln(n+1)$, donc $S_n \rightarrow +\infty$.

Correction 11 Pour simplifier nous supposons $x > 0$.

1. Appliquer le théorème des accroissements finis ne va pas être suffisant. En effet, soit $f(x) = e^x - 1 - x$. Alors il existe $c \in]0, x[$ tel que $f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$. Soit $f(x) = (e^c - 1)x$. Soit maintenant $g(x) = e^x - 1$ alors, par le théorème des accroissements finis sur $[0, c]$ il existe $d \in]0, c[$ tel que $g(c) - g(0) = g'(d)(c - 0)$, soit $e^c - 1 = e^d c$. Donc $e^x - 1 - x = f(x) = (e^c - 1)x = e^d c x$. Comme $d \leq c \leq x$, alors $e^x - 1 - x \leq e^x x^2$.

Cela donne une inégalité, mais il manque un facteur $1/2$.

2. Nous allons obtenir l'inégalité par application du théorème de Rolle. Soit maintenant $f(t) = e^t - 1 - t - k\frac{t^2}{2}$. Nous avons $f(0) = 0$, $x > 0$ étant fixé, nous choisissons k tel que $f(x) = 0$, (un tel k existe car $e^x - 1 - x > 0$ et $x^2 > 0$). Comme $f(0) = 0 = f(x)$ alors par Rolle il existe $c \in]0, x[$ tel que $f'(c) = 0$. Mais $f'(t) = e^t - t - kt$, donc $f'(0) = 0$. Maintenant $f'(0) = 0 = f'(c)$ donc il existe (par Rolle toujours!) $d \in]0, c[$ tel que $f''(d) = 0$. Or $f''(t) = e^t - k$, donc $f''(d) = 0$ donne $k = e^d$. Ainsi $f(x) = 0$ devient $e^x - 1 - x = e^d \frac{x^2}{2}$. Comme $d \leq x$ alors $e^x - 1 - x \leq e^x \frac{x^2}{2}$.

Correction 12 $f'(x) = 2(1-k)^3 x + 3(1+k)x^2$, $f''(x) = 2(1-k)^2 + 6(1+k)x$. Nous avons $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2(1-k)^2$. Donc si $k \neq 1$ alors 0 est un extremum local. Si $k = 1$ alors $f(x) = 2x^3$ et 0 n'est pas un extremum local.

Correction 13 $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$ donc les extremums sont dans $\{0, \frac{3}{4}\}$. Comme $f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x - 1)$. Alors f'' ne s'annule pas en $\frac{3}{4}$ donc $\frac{3}{4}$ donne un extremum (minimum absolu). Par contre $f''(0) = 0$ et $f'''(0) \neq 0$ donc 0 est un point d'inflexion qui n'est pas un extremum (même pas relatif, pensez à x^3).

Correction 14 1. $f'_\lambda(x) = \lambda e^x + 2x$, $f''_\lambda(x) = \lambda e^x + 2$. Les points d'inflexions sont les racines de f''_λ , donc si $\lambda \geq 0$ il n'y a pas de point d'inflexion, si $\lambda < 0$ alors il y a un point d'inflexion en $x_\lambda = \ln(-2/\lambda)$.

2. Si $\lambda \geq 0$ alors f''_λ est toujours strictement positive, donc f'_λ est strictement croissante, en $-\infty$ f'_λ est négative, en $+\infty$ f'_λ est positive donc il existe un unique réel y_λ tel que $f'_\lambda(y_\lambda) = 0$. f_λ est décroissante sur $] -\infty, y_\lambda]$ et croissante sur $[y_\lambda, +\infty[$. Et en y_λ nous avons un extremum absolu.
3. Nous supposons $\lambda < 0$. Alors f''_λ s'annule seulement en x_λ . f'_λ est croissante sur $] -\infty, x_\lambda]$ et décroissante sur $[x_\lambda, +\infty[$. Donc f'_λ est des racines si et seulement si $f'(x_\lambda) \geq 0$. Or $f'(x_\lambda) = -2 + 2x_\lambda$.
 - (a) Si $\lambda = -2/e$ alors $f'_\lambda(x_\lambda) = 0$. comme $f''_\lambda(x_\lambda) = 0$. et f'''_λ ne s'annule pas. Alors x_λ n'est pas un extremum local.
 - (b) Si $\lambda > -2/e$ alors $f'_\lambda(x_\lambda) < 0$ donc f'_λ est négative donc f est strictement décroissante. Il n'y a pas d'extremum local.
 - (c) Si $-2/e < \lambda < 0$ alors $f'_\lambda(x_\lambda) > 0$. Donc f'_λ s'annule en deux points, une fois sur $] -\infty, x_\lambda[$ et une sur $]x_\lambda, +\infty[$. Ce sont des extremums locaux (minimum et maximum respectivement).

Correction 15 1. Le théorème de Rolle dit que si $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.

2. (a) Supposons par l'absurde, qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $g(x_0) = g(a)$. Alors en appliquant le théorème de Rolle à la restriction de g à l'intervalle $[a, x_0]$ (les hypothèses étant clairement vérifiées), on en déduit qu'il existe $c \in]a, x_0[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui contredit les hypothèses faites sur g . Par conséquent on a démontré que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b[$.
- (b) D'après la question précédente, on a en particulier $g(b) \neq g(a)$ et donc p est un nombre réel bien défini et $h = f - p \cdot g$ est alors une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Un calcul simple montre que $h(a) = h(b)$. D'après le théorème de Rolle il en résulte qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$. Ce qui implique la relation requise.
- (c) Pour chaque $x \in]a, b[$, on peut appliquer la question 2.b aux restrictions de f et g à l'intervalle $[x, b]$, on en déduit qu'il existe un point $c(x) \in]x, b[$, dépendant de x tel que

$$(*) \quad \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

Alors, comme $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow b^-} c(x) = b$, on en déduit en passant à la limite dans (*) que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$

Ce résultat est connu sous le nom de "Théorème de l'Hôpital".

3. Considérons les deux fonctions $f(x) = \text{Arccos } x$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ pour $x \in [0, 1]$. Il est clair que ces fonctions sont continues sur $[0, 1]$ et dérivables sur $]0, 1[$ et que $f'(x) = -1/\sqrt{x^2 - 1}$ et que $g'(x) = -x/\sqrt{x^2 - 1} \neq 0$ pour tout $x \in]0, 1[$. En appliquant les résultats de la question 2, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\text{Arccos } x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1.$$

Correction 16 1. (a) Il est clair que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^+ puisque c'est une fonction rationnelle sans pôle dans cet intervalle. De plus d'après la formule de la dérivée d'un quotient, on obtient

$$f'(x) = \frac{n(x^n - 1)}{(1+x)^{n+1}}, \quad x \geq 0.$$

(b) Il résulte clairement de l'expression précédente que $f'(x)$ est du signe de $x^{n+1} - 1$ sur \mathbb{R}^+ . Par conséquent on obtient : $f'(x) \leq 0$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$. Il en résulte que f est décroissante sur $[0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$ et par suite f atteint son minimum sur \mathbb{R}^+ au point 1 et ce minimum vaut $f(1) = 2^{1-n}$.

2. (a) Il résulte de la question 1.b que $f(x) \geq f(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et donc

$$(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

(b) En appliquant l'inégalité précédente avec $x = b/a$, on en déduit immédiatement l'inégalité requise.

Correction 17 1. f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que composée de fonctions dérivables, et sur \mathbb{R}_-^* car elle est nulle sur cet intervalle ; étudions donc la dérivabilité en 0.

On a

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \begin{cases} e^{1/t}/t & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

or $e^{1/t}/t$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs négatives. Donc f est dérivable à gauche et à droite en 0 et ces dérivées sont identiques, donc f est dérivable et $f'(0) = 0$.

2. On a

$$f'(t) = \begin{cases} -e^{1/t}/t^2 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

donc le taux d'accroissement de f' au voisinage de 0 est

$$\frac{f'(t) - f'(0)}{t} = \begin{cases} -e^{1/t}/t^3 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

et il tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc f admet une dérivée seconde en 0, et $f''(0) = 0$.

3. (a) On a déjà trouvé que $f'(t) = -e^{1/t}/t^2$, donc $f'(t) = P_1(t)/t^2 e^{1/t}$ si on pose $P_1(t) = 1$. Par ailleurs, $f''(t) = e^{1/t}/t^4 + e^{1/t}(-2/t^3) = \frac{1-2t}{t^4} e^{1/t}$ donc la formule est vraie pour $n = 2$ en posant $P_2(t) = 1 - 2t$.

(b) Supposons que la formule est vraie au rang n . Alors $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$ d'où

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{P'_n(t)t^{2n} - P_n(t)(2n)t^{2n-1}}{t^{4n}} e^{1/t} + \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}(-1/t^2) \\ &= \frac{P'_n(t)t^2 - (2nt + 1)P_n(t)}{t^{2(n+1)}} e^{1/t} \end{aligned}$$

donc la formule est vraie au rang $n + 1$ avec

$$P_{n+1}(t) = P'_n(t)t^2 - (2nt + 1)P_n(t).$$

4. Sur \mathbb{R}_- et sur \mathbb{R}_+ f est indéfiniment dérivable, donc il suffit d'étudier ce qui se passe en 0.

Montrons par récurrence que f est indéfiniment dérivable en 0, et que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} = 0$. On sait que c'est vrai au rang 1. Supposons que f est n -fois dérivable, et que $f^{(n)} = 0$. Alors le taux d'accroissement de $f^{(n)}$ en 0 est :

$$\frac{f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)}{t} = \begin{cases} P_n(t)e^{1/t}/t^{2n} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

et sa limite est 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0, et $f^{(n+1)}(0) = 0$. Donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $n + 1$.

Par conséquent, f est de classe C^∞ .